Udruga za nadarenu djecu DAR
Ožujak, 2016, Zagreb

O LINEARNOM PROGRAMIRANJU I

Professor Emeritus Luka Neralić
Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet
Trg J. F. Kennedya 6, 10000 Zagreb, Croatia
E-mail: lneralic@efzg.hr

Uvod

• Mnogi problemi koji se javljaju u praksi, formulirani u matematičkom obliku sastoje se u određivanju ekstrema, tj. maksimuma ili minimuma, neke funkcije od određenog broja varijabli, uz zadane uvjete (ili ograničenja) na te varijable, izražene u obliku jednadžbi i/ili nejednadžbi.

• Tako formuliran problem naziva se *problemom matematičkog programiranja*. Specijalno, ako je funkcija cilja za koju treba odrediti maksimum ili minimum linearna, te ako su uvjeti izraženi u obliku linearnih jednadžbi i/ili nejednadžbi, onda je to *problem linearnog programiranja*.

• Pri tome se pod programiranjem podrazumijeva optimalna alokacija (raspodjela) ograničenih resursa, da bi se postigli određeni ciljevi.

• Na primjer, takvi su resursi rad, sirovine, strojevi, a potrebno ih je kombinirati tako da se dobiju određeni proizvodi, uz maksimalni profit, ili minimalne troškove, itd.

• Linearno programiranje kao disciplina spada u *operacijska istraživanja*, koja su se razvila u II. svjetskom ratu iz vojnih potreba.

• Naime, ograničene resurse trebalo je u ratu rasporediti na različite vojne operacije i aktivnosti. Pri tome se željelo postići što bolje efekte, pa su pozvani znanstvenici da primijene znanstveni pristup u rješavanju takvih problema.

• Upravo odatle i dolazi naziv operacijska istraživanja, jer se radilo o istraživanju vojnih operacija. Kasnije je taj termin zadržan, ali se koristi u širem smislu.

• Naime, operacijska istraživanja znače takav znanstveni pristup istraživanju i projektiranju sustava i donošenju odluka, koji se osniva na matematičkom modeliranju procesa i pojava.

• Pri tome se radi o primjeni na probleme u kojima treba upravljati i koordinirati operacijama ili aktivnostima u okviru neke organizacijske jedinice.

• Sam proces započinje razmatranjem i formulacijom problema, a zatim se na osnovu toga izgrađuje model, koji je najčešće matematički i predstavlja određenu aproksimaciju stvarnog problema.

• Ako je taj model dovoljno dobra aproksimacija stvarnosti, onda se uz pomoć rezultata (odnosno rješenja) dobivenih iz modela (na osnovu odgovarajuće metode, programske podrške i računala) mogu lakše donositi različite odluke, koje se odnose na organizaciju (ili sustav) u razmatranju.

• Rješenje dobiveno iz modela je najbolje (optimalno) prema nekom kriteriju (ili cilju) i koristi se kao pom oć u donošenju poslovnih i drugih odluka.

• Ovdje ćemo najprije uvesti osnovne pojmove u lineranom programiranju kroz formulaciju nekoliko primjera, koje ćemo riješiti grafički.

• Zatim ćemo prikazati simpleks metodu, koja se koristi za rješavanje problema linearnog programiranja, te pomoću te metode riješiti dva primjera.

• Na kraju ćemo navesti neka pitanja i probleme, koji se izučavaju u linearnom programiranju, čitatelja uputiti na dodatnu literaturu i dati neke podatke o softwareu, te zadati nekoliko zadataka za samostalno rješavanje.

Formulacija i grafičko rješenje primjera

• **Primjer 1.** Pretpostavimo da se u nekom poduzeću proizvode dva proizvoda P_1 i P_2.

• Ti se proizvodi obrađuju na tri grupe strojeva S_1, S_2 i S_3. Poznati su tjedni kapaciteti tih grupa strojeva (u satima), kao i vrijeme obrade (u satima) pojedinog proizvoda na odgovarajućoj grupi strojeva.

• Osim toga, poznat je profit po jedinici svakog od proizvoda (u 000 kuna) (vidi tablicu 1).

Tablica 1
Podaci za Primjer 1

grupa strojeva	broj sati po jedinici P_1	utrošenih proizvoda P_2	kapaciteti grupa strojeva (u satima)
S_1	5	2	500
S_2	1	2	180
S_3	0	1	80
profit po jedinici proizvoda (u 000 kn)	10	8	

• Postavlja se pitanje koliko treba proizvesti proizvoda P_1, a koliko proizvoda P_2 tako, da ukupno ostvareni profit bude maksimalan?

- Da bi odgovorili na to pitanje uvedimo najprije sljedeće oznake.

- Neka je

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{nepoznata količina proizvoda, } P_1 \\ x_2 &= \text{nepoznata količina proizvoda, } P_2 \end{aligned}$$

koje treba proizvesti.

- Kako za jedinicu proizvoda P_1 treba utrošiti 5 sati rada grupe strojeva S_1, to znači da za x_1 jedinica proizvoda treba utrošiti $5x_1$ sati rada te grupe strojeva.

- Slično tome, za x_2 jedinica proizvoda P_2 iz grupe strojeva S_1 potrebno je utrošiti $2x_2$ sati.

• Kako je ukupno na raspolaganju 500 sati rada grupe strojeva S_1, a taj broj ne može biti premašen, mora biti zadovoljeno ograničenje

$$5x_1 + 2x_2 \leq 500.$$

• Analognim razmatranjem zaključujemo da za grupu strojeva S_2 mora vrijediti ograničenje

$$1x_1 + 2x_2 \leq 180,$$

te da za grupu strojeva S_3 mora biti zadovoljeno ograničenje

$$1x_2 \leq 80.$$

• Kako količine proizvoda x_1 i x_2 ne mogu biti negativne, potrebno je dodati još i ograničenje nenegativnosti na varijable

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

• Budući da profit po jedinici proizvoda P_1 iznosi 10, ukupan profit od x_1 jedinica tog proizvoda je $10x_1$.

• Slično tome, profit od x_2 jedinica proizvoda P_2 iznosi $8x_2$.

• Kako je cilj ostvariti maksimalan ukupan profit, to znači da treba maksimizirati funkciju

$$z = 10x_1 + 8x_2$$

uz uvažavanje navedenih ograničenja.

• Prema tome, naš problem sastoji se u sljedećem:

$$\max \;\; z = 10x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} 5x_1 + 2x_2 & \leq & 500 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 180 \\ x_2 & \leq & 80 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 & \geq & 0. \end{array} \qquad\qquad (LP)$$

• Problem (LP) upravo je *problem linearnog programiranja*, pri čemu $\max z$ znači maksimizirati z.

• Linearna funkcija z od dvije varijable, koju treba maksimizirati je *funkcija cilja* (ili *kriterija*), dok su prve tri linearne nejednadžbe u (LP) *ograničenja* na te varijable.

• Konačno, linearne nejednadžbe u posljednjem retku problema (LP) su *ograničenja nenegativnosti* na varijable.

• Svaki uređeni par (x_1, x_2) čije koordinate zadovoljavaju sva ograničenja je *moguće* (ili *dopustivo*) *rješenje* ili *program*.

• Ono moguće rješenje (x_1^*, x_2^*) (ako takvo postoji!), za koje funkcija cilja z doseže maksimalnu vrijednost je *optimalno rješenje* ili *optimalni program*.

- Na primjer, $x_1 = 50, x_2 = 40$ je moguće rješenje. Naime, vrijedi

$$5 \cdot 50 + 2 \cdot 40 = 250 + 80 = 330 < 500,$$

pa je zadovoljeno prvo ograničenje. Zatim vrijedi

$$50 + 2 \cdot 40 = 50 + 80 = 130 < 180,$$

pa je zadovoljeno drugo ograničenje. Kako je

$$40 < 80,$$

zadovoljeno je i treće ograničenje. Zbog

$$50 > 0, 40 > 0,$$

zadovoljeno je i ograničenje nenegativnosti varijabli, pa su time sva ograničenja zadovoljena.

- Međutim, $x_1 = 10, x_2 = 85$ nije moguće rješenje, jer zbog $85 > 80$ nije zadovoljeno treće ograničenje.

• Skup S mogućih rješenja problema (LP) može se prikazati grafički u koordinatnoj ravnini x_1Ox_2 (vidi sliku 1). Naime, to je skup onih točaka $T(x_1, x_2)$ u ravnini, koordinate kojih zadovoljavaju nejednadžbe u (LP).

• Ako uvedemo oznake

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid 5x_1 + 2x_2 \leq 500\}, \quad S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + 2x_2 \leq 180\},$$

$$S_3 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \leq 80\}, \quad S_4 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0\},$$

$$S_5 = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0\}$$

onda je skup S mogućih rješenja problema (LP) jednak presjeku skupova S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5, tj.

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5.$$

• Naime, skupove S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5 promatrat ćemo kao skupove točaka u ravnini M, koordinate kojih zadovoljavaju odgovarajuću nejednadžbu.

• Tada je svaki od skupova S_1, S_2, S_3, S_4 i S_5 jedna zatvorena poluravnina ravnine M.

• Na primjer, pravac p_1 određen jedadžbom $5x_1 + 2x_2 = 500$ dijeli ravninu M na dvije poluravnine, od kojih je jedna M_1 ispod tog pravca, a druga M_1' iznad njega.

• Točke na pravcu p_1 zadovoljavaju jednadžbu pravca, pa su one jedan dio skupa S_1.

• Zatim, koordinate točaka u poluravnini M_1 ispod pravca p_1 zadovoljavaju nejednadžbu $5x_1 + 2x_2 \leq 500$, koja prelazi u strogu nejednakost.

• To se npr. vidi za ishodište $O(0, 0)$, jer vrijedi $5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 < 500$.

• Dakle, skup S_1 sastoji se od točaka na pravcu p_1 i u poluravnini M_1 ispod tog pravca, tj. $S_1 = p_1 \cup M_1$, što znači da je S_1 zatvorena poluravnina.

• Analogno zaključivanje vrijedi za skupove S_2, S_3, S_4 i S_5.

• No, tada je skup S upravo peterokut $OABCD$ na slici 1.

• Svaki vrh tog peterokuta nalazi se na presjeku dvaju pravaca. To znači da za njegove vrhove mora vrijediti:

$$\begin{array}{ll} O: & x_1 = 0, x_2 = 0 \\ A: & x_2 = 0, 5x_1 + 2x_2 = 500 \\ B: & 5x_1 + 2x_2 = 500, x_1 + 2x_2 = 180 \\ C: & x_1 + 2x_2 = 180, x_2 = 80 \\ D: & x_1 = 0, x_2 = 80. \end{array}$$

• Rješenje svakog od tih sustava linearnih jednadžbi daje koordinate odgovarajuće točke. Lako se dobije da je $O(0,0), A(100,0), B(80,50), C(20,80)$ i $D(0,80)$.

• Postavlja se pitanje možemo li grafički doći do rješenja problema (LP)?

• Odgovor je potvrdan, a do rješenja ćemo doći na osnovu sljedećeg razmatranja.

- Uzmimo da nas zanimaju one količine x_1 i x_2 proizvoda P_1 i P_2 za koje se doseže jednaka vrijednost funkcije cilja, npr. $z_1 = 400$.

- Kako grafički odrediti te količine?

- Budući da u tom slučaju mora vrijediti

$$10x_1 + 8x_2 = 400,$$

time je u ravnini određen pravac z_1 kojeg znamo nacrtati.

- Taj pravac prolazi npr. točkama $(40, 0)$ i $(0, 50)$, čije koordinate zadovoljavaju jednadžbu tog pravca, te sadrži točke iz skupa mogućih rješenja, koje se nalaze između tih točaka. (Pravac z_1 prikazan je iscrtkanom linijom na sl. 1.)

- Primjetimo da je koeficijent smjera tog pravca $k_1 = -10/8$.

- Pravac paralelan sa promatranim pravcem, određen npr. s $z_2 = 1000$, koji ima isti koeficijent smjera, a njegova je udaljenost od ishodišta veća, sadrži točke (x_1, x_2) iz skupa S mogućih rješenja, sa većom vrijednošću funkcije cilja.

- Dakle, da se dobije rješenje, treba naći pravac paralelan zadanom pravcu z_1, sa što većom udaljenošću od ishodišta, koji ima zajedničkih točaka sa skupom S.

- To je očigledno pravac z^*, paralelan s pravcem z_1 koji prolazi točkom B.

• Ako točku B projiciramo na os x_1, dobivamo $x_1^* = 80$, dok njena projekcija na os x_2 daje $x_2^* = 50$.

• Koordinate točke B mogu se dobiti i kao rješenje sustava linearnih jednadžbi $5x_1 + 2x_2 = 500, x_1 + 2x_2 = 180$, koje predstavljaju jednadžbe pravaca što se sijeku u toj točki.

• Prema tome, dobili smo optimalno rješenje, prema kojem treba proizvoditi $x_1^* = 80$ komada proizvoda P_1 i $x_2^* = 50$ komada proizvoda P_2.

• Pri tome je maksimalni iznos profita jednak odgovarajućoj vrijednosti funkcije cilja, tj.

$$z^* = 10 \cdot 80 + 8 \cdot 50 = 800 + 400 = 1200$$

tisuća kuna.

• U ovom primjeru očigledno je skup S mogućih rješenja problema (LP) linearnog programiranja *konveksan skup*.

• Naime, skup je *konveksan* ako za svake dvije njegove točke T_1 i T_2 sadrži cijelu dužinu $\overline{T_1 T_2}$, koja spaja te točke.

• Pri tome se uzima da je prazan skup također konveksan, kao i skup koji se sastoji od samo jedne točke.

• Zatim, nije teško dokazati da je presjek konveksnih skupova također konveksan skup.

• Osim toga, svaki od skupova S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 je konveksan skup, jer je zatvorena poluravnina konveksan skup.

• Konačno, skup S kao presjek zatvorenih poluravnina, koje su konveksni skupovi, također je konveksan skup.

• Ta činjenica vrijedi i za opći problem linearnog programiranja, tj. skup mogućih rješenja problema linearnog programiranja je *konveksan skup*.

• Napomenimo još da je skup S mogućih rješenja problema (LP) i *zatvoren* (tj. da sadrži sve svoje granične točke), kao presjek zatvorenih poluravnina, što također vrijedi u općem slučaju.

• Ako je skup S mogućih rješenja neprazan i omeđen (tj. zatvoreni konveksni poligon), optimalno rješenje nalazi se u njegovom vrhu (ekstremnoj točki).

• Pri tome kažemo da je skup S u ravnini M *omeđen*, ako je sadržan unutar kruga polumjera r sa središtem u ishodištu. U suprotnom kažemo da je skup S *neomeđen*.

• Zatim, točka T iz S je *ekstremna točka (vrh)*, ako je za svaku dužinu sadržanu u S, kojoj pripada T, točka T krajnja točka te dužine.

• Može se dokazati da funkcija cilja problema linearnog programiranja, u kojem je skup S mogućih rješenja neprazan i omeđen (zatvoreni konveksni poligon), doseže maksimum (i minimum) u ekstremnoj točki (vrhu) skupa S.

• Ako je skup S mogućih rješenja neomeđen, može se dogoditi da funkcija cilja ne dosegne ekstremnu vrijednost (jer može, na pr. za problem maksimizacije, poprimiti po volji velike vrijednosti, pa kažemo da nije ograničena odozgo na skupu S) (vidi primjer 3, u nastavku teksta), ali se može desiti i da problem ima optimalno rješenje (vidi primjer 4, u nastavku teksta).

• Rješenje razmatranog primjera (LP) nalazi se u točki B, tj. u jednoj od ekstremnih točaka (vrhova) zatvorenog konveksnog poligona $OABCD$, koji je skup S mogućih rješenja.

• U skladu s prethodnim razmatranjem, mogli smo doći do rješenja tako da ispitamo vrijednost funkcije cilja u vrhovima skupa S i nađemo onaj vrh u kojem se doseže maksimalna vrijednost funkcije cilja.

- U promatranom primjeru tada dobivamo:

Vrh	(x_1, x_2)	$10x_1 + 8x_2 = z$
O :	$(0, 0)$	$10 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$
A :	$(100, 0)$	$10 \cdot 100 + 8 \cdot 0 = 1000$
B :	$(80, 50)$	$10 \cdot 80 + 8 \cdot 50 = 1200 = z^*$
C :	$(20, 80)$	$10 \cdot 20 + 8 \cdot 80 = 840$
D :	$(0, 80)$	$10 \cdot 0 + 8 \cdot 80 = 640.$

- Prema tome, optimalno rješenje je vrh B, s koordinatama $x_1^* = 80, x_2^* = 50$, u kojem je vrijednost funkcije cilja $z^* = 1200$ maksimalna.

- Taj postupak se može primijeniti i na druge primjere, te naći optimalno rješenje, ako ono postoji, ili ustanoviti da problem nema optimalnog rješenja (zbog toga što nema mogućeg rješenja ili zbog toga što fukcija cilja nije omeđena na skupu mogućih rješenja, kada može poprimiti po volji velike vrijednosti u problemu maksimizacije).

• **Primjer 2.** Razmotrimo problem linearnog programiranja koji ima jednaka ograničenja kao problem u primjeru 1, ali je funkcija cilja oblika

$$z = 10x_1 + 20x_2.$$

• Tada je očgledno skup S mogućih rješenja nepromijenjen, jer su ograičenja ista i on se nalazi na sl. 1.

• Grafičkim rješavanjm tog novog problema lako se pokaže da paralelni pravci

$$10x_1 + 20x_2 = c,$$

gdje je $c =$ konstanta, predstavljaju razinske linije nove funkcije cilja, za različite vrijednosti konstante c.

• Pri tome, većim vrijednostima konstante c odgovaraju pravci koji su udaljeniji od ishodišta.

• Pravac među njima, koji je najviše udaljen od ishodišta i ima zajedničkih točaka sa skupom S, prolazi točkama B i C.

• To onda znači da se rješenje problema linearnog programiranja doseže u oba vrha (ekstremne točke).

• Međutim, tada je rješenje i svaka točka dužine $\overline{BC}$, pa problem ima beskonačno mnogo rješenja.

• Lako se dobije, npr. uvrštavanjem koordinata točke $B(80, 50)$ u funkciju cilja, da je njena optimalna vrijednost
$z^* = 10 \cdot 80 + 20 \cdot 50 = 800 + 1000 = 1800$.

• Ako uvrstimo koordinate točke $C(20, 80)$ u funkciju cilja, dobivamo $z^* = 10 \cdot 20 + 20 \cdot 80 = 200 + 1600 = 1800$.

• Primjetimo da je u oba promatrana primjera skup optimalnih rješenja konveksan (točka odnosno dužina), što vrijedi i u općem slučaju.

• **Primjer 3.** Razmotrimo sljedeći linearni program

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ -2x_1 + 2x_2 & \leq & 2 \end{array} \qquad (LP1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

• Skup S mogućih rješenja tog problema prikazan je na slici 2.

• Kao što se vidi skup S je neomeđen i sadrži ekstremne točke $O(0,0), A(1,0)$ i $B(0,1)$.

• Razinska linija, određena sa $z = 0$, je pravac $x_1 + x_2 = 0$ na sl. 2, prikazan iscrtkano, koji prolazi kroz ishodište.

• Pravci, koji odgovaraju većim vrijednostima funkcije cilja, paralelni su promatranom pravcu $z = 0$ i njihova udaljenost od ishodišta je veća. Pravac za koji je $z = 1$ prolazi točkama A i B.

• Lako se vidi da je moguće paralelnim pomakom pravca $z = 0$ ići po volji daleko od ishodišta i da pri tome pravac ima zajedničkih točaka sa skupom S mogućih rješenja.

• To onda znači da funkcija cilja $z = x_1 + x_2$ može doseći po volji velike vrijednosti (tada kažemo da nije omeđena odozgo na skupu S), pa problem nema optimalnog rješenja (maksimum funkcije cilja na skupu S se ne doseže).

• **Primjer 4.** Promatrajmo problem linearnog programiranja koji se razlikuje od problema u prethodnom primjeru u tome što treba minimizirati (umjesto maksimizirati) istu funkciju cilja uz ista ograničenja.

• Lako se vidi da u tom slučaju problem ima optimalno rješenje, jer se minimum doseže u ekstremnoj točki $O(0,0)$, sa minimalnom vrijednošću funkcije cilja $z^* = 0$.

• Na osnovu svega izloženog može se dati metoda za rješavanje problema linearnog programiranja s linearnom funkcijom cilja od dvije varijable i ograničenjima u obliku linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice.

• Metoda se sastoji od sljedećih koraka:

• 1. Prikazati grafički skup S mogućih rješenja.

• 2. Odrediti koordinate ekstremnih točaka (vrhova) skupa S mogućih rješenja.

• 3. Izračunati vrijednost funkcije cilja u svim ekstremnim točkama.

• 4. Izabrati najveću, odnosno najmanju od tih vrijednosti, ako je riječ o problemu maksimuma, odnosno minimuma.

• Ako je skup S mogućih rješenja omeđen, ekstremna točka u kojoj se doseže najveća, odnosno najmanja vrijednost jest optimalno rješenje.

• Ako je pak skup S neomeđen i problem ima optimalno rješenje, ono je također ekstremna točka u kojoj se doseže najveća, odnosno najmanja vrijednost funkcije cilja.

• **Napomena.** Ako se, u skladu s tom metodom, vratimo primjeru 1, pripadni skup S mogućih rješenja prikazan je na sl. 1 (1. korak).

• Ekstremne točke (2. korak) i odgovarajuća vrijednost funkcije cilja (3. korak) navedeni su i objašnjeni.

• Kako se radi o problemu maksimizacije, najveća vrijednost funkcije cilja jest $z^* = 1200$, a doseže se za $x_1^* = 80, x_2^* = 50$.

• Skup S mogućih rješenja je omeđen, pa je to optimalno rješenje problema (4. korak).

• Navedimo pretpostavke koje smo koristili u formulaciji primjera.

• Pri tome istaknimo da se one koriste i u općem slučaju pri formulaciji problema linearnog programiranja.

• Varijabla x_1, koja predstavlja nepoznatu količinu proizvoda P_1, može se promatrati kao *razina* (ili *nivo*) aktivnosti 1, kojom se resursi prevode u proizvode.

• Analogno vrijedi za x_2, kao razinu aktivnosti 2.

• Pri tome su podaci u tablici 1 navedeni za razine jedinične aktivnosti $x_1 = 1$ i $x_2 = 1$, tj. po jedinici proizvoda P_1 i P_2.

• Prva pretpostavka je *proporcionalnost* svake od promatranih aktivnosti.

• Naime, ako promatramo aktivnost 1 na razini x_1, tada je doprinos funkciji cilja $10x_1$, pri čemu je 10 doprinos aktivnosti 1 funkciji cilja na razini $x_1 = 1$.

• Slično tome, doprinos funkciji cilja aktivnosti 2 na razini x_2 je $8x_2$.

• Zatim, za razinu x_1 aktivnosti 1 utrošak resursa 1 (tj. sati grupe strojeva S_1) je $5x_1$, a za razinu x_2 aktivnosti 2 utrošak resursa 1 je $2x_2$.

• Analogno vrijedi za utrošak resursa 2 i 3.

• Druga je pretpostavka *aditivnost*, što znači da je za bilo koju razinu (x_1, x_2) promatranih aktivnosti ukupan doprinos funkciji cilja jednak zbroju doprinosa pojedinih aktivnosti, tj. $10x_1 + 8x_2$.

• Zatim, ukupan utrošak nekog resursa jednak je zbroju odgovarajućih utrošaka tog resursa za pojedine razine aktivnosti.

• To znači, npr., da je ukupan utrošak resursa 1 na razini aktivnosti (x_1, x_2) u promatranom primjeru jednak $5x_1 + 2x_2$.

• Proporcionalnost i aditivnost osiguravaju linearnost funkcije cilja i uvjeta na varijable.

• Ako te pretpostavke za neki problem nisu ispunjene, onda odgovarajući model nije linearni program.

• Zatim, pretpostavljamo da su parametri u modelu koje promatramo (oni se nalaze u tablici 1) poznate konstante, što znači determinističke veličine.

• Ta pretpostavka nije uvijek u praksi ispunjena, jer se do parametara u modelu obično dolazi na osnovu statističkih procjena njihovih vrijednosti.

• Zbog toga je posebno važna *analiza osjetljivosti* rješenja na promjenu tih parametara.

• Istaknimo da se problem minimizacije (npr. problem prehrane i problem transporta) može svesti na problem maksimizacije, jer vrijedi

$$\min z(x_1, x_2) = -\max[-z(x_1, x_2)].$$

• Zato je dovoljno promatrati samo jedan od tih problema, recimo problem maksimizacije.

• Dosad smo vidjeli kako se može grafički rješiti promatrani primjer linearnog programa, sa dvije varijable.

• Međutim, stvarni problemi imaju zapravo veliki broj kako varijabli, tako i ograničenja.

• Kako u tom slučaju riješiti problem linearnog programiranja?

• To je moguće pomoću *simpleks metode*, o kojoj će biti govora u idućem izlaganju.