

Festival matematike "Split 2016."
Ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
Split, 6. svibnja 2016.

ALFA

List - 1

| | |
|-------------------|-----------|
| Točan odgovor: | 10 bodova |
| Pogrešan odgovor: | -5 bodova |
| Bez odgovora: | 0 bodova |

1. i^{2016} je jednako:

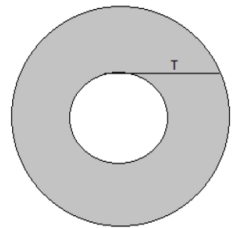
- A) $-i$ B) -1 C) 0 D) 1 E) i

2. $5^{55} + 5^{55} + 5^{55} + 5^{55} + 5^{55} = ?$

- A) 5^{55} B) 5^{56} C) 25^{56} D) 5^{275} E) 25^{275}

3. Kolika je površina kružnog vijenca istaknutog na slici?

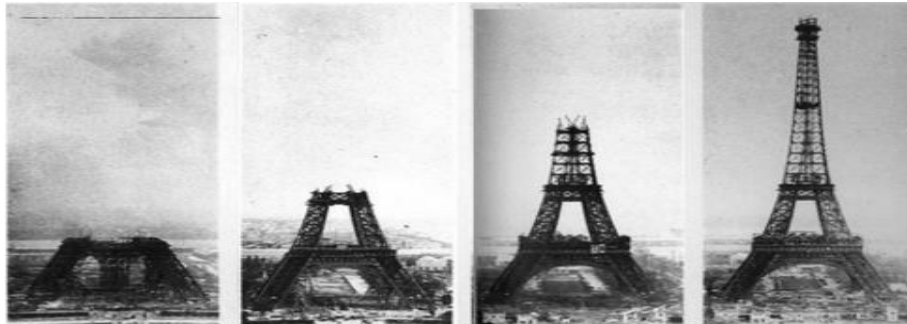
- A) $\pi\sqrt{T}$ B) πT^3 C) πT^2 D) ne može se odrediti E) πT



4. Na jednoj zabavi svi su se rukovali sa svima ostalima točno jednom. Bilo je 66 rukovanja. Koliko je ljudi bilo na zabavi? (Napomena: Ne možete se rukovati sami sa sobom.)

- A) 61 B) 33 C) 24 D) 11 E) 12

5. Eiffelov toranj je bila najviša građevina na svijetu do 1930. Ako su prve tri slike snimljene u ožujku 1888., srpnju 1888. i studenom 1888. godine, koji je od navedenih datuma najvjerojatniji datum konačnog završetka tornja?



- A) siječanj 1890. B) srpanj 1889. C) ožujak 1889. D) prosinac 1888. E) kolovoz 1890.

6. $\sqrt{(-8)^2} =$

- A) -8 B) 8 C) -4 D) $8i$ E) 0

7. Dana su dva trokuta. Duljine stranica prvoga su 13, 13, 10, a drugoga 13, 13, 24. Kakav je odnos površina tih trokuta?

- A) jednake su B) prva je veća C) druga je veća D) ne može se odrediti

Festival matematike "Split 2016."
Ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
Split, 6. svibnja 2016.

8. $2^{2^{2^{2^0}}} = ?$

- A) 1 B) 0 C) 4 D) 16 E) Ništa od navedenog

9. 3.3 sata je:

- A) 3 h 3 min B) 3 h 9 min C) 3 h 18 min D) 3 h 20 min E) 3 h 90 min

10. Kada vrijedi: $(a - b) - c = a - (b - c)$

- A) uvijek B) samo ako je najmanje jedna od varijabli 0 C) samo ako je $c=0$
D) samo ako su sve varijable jednake 0 E) nikada ne vrijedi

11. $\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{12}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{100}\right) =$

- A) 0.09 B) 9 C) 100 D) 1 E) 11

12. Vrijedi: Svi pangovi su pingovi. Neki pingovi su pongovi. Tada je izjava: Neki pangovi su pongovi.

- A) Istinita
B) Lažna, jer ne mora ni jedan pang biti pong.
C) Lažna, jer su svi pangovi pongovi.
D) Lažna, jer ni jedan pang nije pong
E) Lažna, jer su svi pongovi pangovi.

13. 16% od $\frac{3 + \frac{4}{25} + 0.59}{\left(\frac{3}{4} - 0.15\right) : 4}$ je:

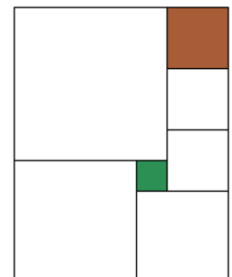
- A) 16 B) 3 C) 4 D) 6 E) 7.5

14. Polumjer valjka uveća se za 50 %. Za koliko se postotaka uveća njegov obujam?

- A) 100% B) 130% C) 125% D) 225% E) 75%

15. Ako je duljina stranice manjeg označenog kvadrata 1, a većeg 2, kolika je površina pravokutnika na slici?

- A) 56 B) 63 C) 54 D) 49 E) 36



Festival matematike "Split 2016."
 Ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
 Split, 6. svibnja 2016.

ALFA

List - 2

Točan odgovor: 20 bodova
 Pogrešan odgovor: - 10 bodova
 Bez odgovora: 0 bodova

16. Na koliko se načina može 10 ljudi podijeliti u 2 ekipe tako da oni mogu igrati košarku 5 na 5?

- A) 720 B) 120 C) 256 D) 126 E) 252

17. Nađi vrijednosti koeficijenta b tako da pravac $y = bx$ siječe parabolu $y = x^2 - b$

- A) $(-\infty, -8)$ B) $(-\infty, -8) \cup (0, \infty)$ C) $(-\infty, 8)$
 D) $(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$ E) $(-\infty, -8) \cup (8, \infty)$

18. U svaki pravokutnik na slici je upisana njegova površina. Koji broj treba pisati umjesto upitnika?

- A) 12 B) 24 C) 18 D) 27 E) 30

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | | | ? |
| 1 | 3 | | |
| | 2 | 4 | |
| | | 3 | 6 |

19. Jednadžba $z^2 + \bar{z} = 0$ gdje je z kompleksni broj ima rješenja :

- A) 1 B) 5 C) 4 D) 2 E) 3

20. Koliko pozitivnih djelitelja ima broj 1007021035035021007001 ?

- A) 100 B) 64 C) 512 D) 1224 E) 2600

21. Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $a + b + c = abc$. Odredite $[100m]$ ako je m najmanja vrijednost izraza $\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}$

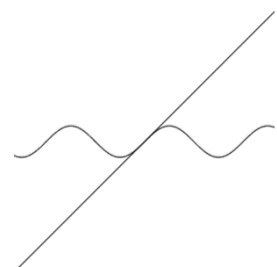
- A) 100 B) 200 C) 400 D) 800 E) 1600

22. Koliko rješenja u skup \mathbb{R} ima jednadžba $|2 - |1 - |x|| = 1$?

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 2 E) 5

23. Je li $f(x) = x + \sin x$ injektivna funkcija?

- A) Da B) Ne C) Premalo je podataka
 D) Ništa od navedenog E) Nije funkcija



Festival matematike "Split 2016."
 Ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
 Split, 6. svibnja 2016.

24. Odredi sve vrijednosti realnog parametra k za koji polinom $f(x) = (k-2)x^2 + 3x + k + 2$ prima negativne vrijednosti za svaki realni broj x .

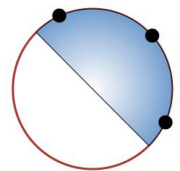
- A) $k < -1$ B) $k > \frac{1}{2}$ C) $k < -\frac{1}{2}$ D) $k > \frac{5}{2}$ E) $k < -\frac{5}{2}$

25. Kružnica polumjera 8 cm točkama A, B, C i D podijeljena je u omjeru 1 : 3 : 4 : 7. Površina četverokuta ABCD iznosi:

- A) 112.5 cm² B) 132.5 cm² C) 82.5 cm² D) 81.93 cm² E) 94.19 cm²

26. Tri točke su slučajno izabrane na luku kružnice. Kolika je vjerojatnost da one leže na zajedničkoj polukružnici?

- A) 0.33 B) 0.25 C) 0.5 D) 0.67 E) 0.75



27. Stotinu ljudi čeka na ulazak u zrakoplovu za München u kojem je 100 je mjesta. Prvi od njih je izgubio svoj boarding pass (zrakoplovnu kartu) pa sjeda na proizvoljno mjesto. Svaki slijedeći putnik u nizu sjeda na svoje mjesto ako je slobodno, inače na proizvoljno slobodno mjesto. Kolika je vjerojatnost da će posljednji putnik u nizu sjesti na sjedalo koje piše u njegovoj zrakoplovnoj karti?

- A) 0.1 B) 0.3 C) 0.5 D) 0.8 E) 0.9

28. Ako je $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$ Tada je $\sin x$:

- A) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ B) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{3}}$ D) 2 E) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$

29. Ako je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ onda je vrijednost izraza $\frac{2 - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{2 + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta} =$

- A) 1 B) 3 C) 0 D) -2 E) 2

30. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots =$

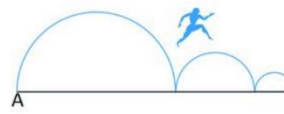
- A) 2 B) 4 C) 1 D) 3 E) ∞

Festival matematike "Split 2016."
Ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
Split, 6. svibnja 2016.

ALFA

List - 3

| | |
|-------------------|-------------|
| Točan odgovor: | 30 bodova |
| Pogrešan odgovor: | - 15 bodova |
| Bez odgovora: | 0 bodova |

31. Koliko jednačba $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ ima rješenja u intervalu $[0, 2\pi]$
A) ni jedno B) 1 C) 2 D) 3 E) 10
32. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ gdje su $a, b, c \in \mathbb{N}$ prolazi kroz točke $A(-2, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(\alpha, \beta)$, $D(2, 7)$. Točke A, B, C i D u zadanom redoslijedu čine konveksan četverokut maksimalne površine. Odredite najmanju vrijednost od $a + b + c + 2\alpha + 4\beta$
A) 1 B) 11 C) 21 D) 7 E) 17
33. Neka je $L = \lim_{n \rightarrow \infty} ((x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n))^{\frac{1}{n}} - x$ gdje je $a_i = \frac{1}{2^i}$. Odredi $\lim_{n \rightarrow \infty} (nL)$
A) 1 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) 0
34. U kesici je n kuglica od kojih su neke crvene, a ostale su bijele. Izvlačimo dvije kuglice bez vraćanja. Koji je najveći broj kuglica n (manji od 1000) takav da vjerojatnost da smo izvukli kuglice različite boje bude jednak vjerojatnosti da smo izvukli kuglice iste boje?
A) 96 B) 961 C) 1000 D) 696 E) Ne postoji takav broj manji od 1000
35. U geometrijskom nizu $a_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $q = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Modul $|a_{20}|$ iznosi:
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 2
36. Sustav u kojem vrijedi jednakost $31 \cdot 412 = 23322$ ima bazu :
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4
- 
37. Udaljenost od mjesta A do B je 10 km. Zen skače iz mjesta A prema mjestu B i to tako da u jednom koraku preskoči pola preostale udaljenosti do mjesta B. Koliku je udaljenost Zen prešao nakon 100 koraka?
A) $\sum_{n=0}^{100} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ B) $\sum_{n=1}^{100} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ C) $\sum_{n=1}^{100} (5)^n$ D) $\sum_{n=1}^{100} 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ E) 500km
38. Koliko je od sljedećih 99 brojeva prostih?
 $100!+2, 100!+3, 100!+4, \dots, 100!+100$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 10 E) 19

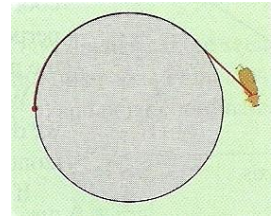
Festival matematike "Split 2016."
Ekipno natjecanje učenika osnovnih i srednjih škola
Split, 6. svibnja 2016.

39. Koji je ostatak pri dijeljenju $105^{165} - 1$ s 4 ?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

40. Krava je vezana za silos promjera r konopom tolike duljine da može doći do suprotne strane silosa. Odredite površinu koja je kravi na raspolaganju za ispašu ako je $r = 10$. (Zaokruženo na cijeli broj)

- A) 100 B) 314 C) 3096 D) 3782 E) 2584

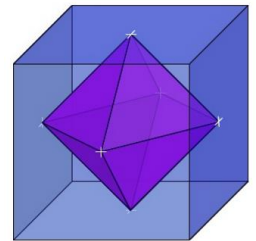


41. $\frac{6! \times 7!}{10!} = ?$

- A) 1 B) 7 C) 6 D) 10 E) 42

42. Koliki je volumen oktaedra kojem su vrhovi sjecišta dijagonala stana kocke volumena 8m^3 ?

- A) $\frac{8}{3}\text{m}^3$ B) 1m^3 C) $\frac{4}{3}\text{m}^3$ D) 4m^3 E) 3m^3



43. Dan je aritmetički niz realnih brojeva: $\frac{a}{b}, ab, a - b, a + b$. Slijedeći član niza je

- A) $\frac{ab}{b}$ B) $-\frac{ab}{b}$ C) $\frac{ab}{a-b}$ D) $-\frac{a+b}{b}$ E) $-\frac{117}{40}$

44. $\lim_{xy \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{\ln y} + \frac{\ln y}{\ln x} \right) =$

- A) 2 B) 0 C) -2 D) 1 E) Ne postoji

45. Za prirodan broj n $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{r=1}^{2^{n-1}-1} \tan^2 \left(\frac{r\pi}{2^n} \right)}{4^n}$ je oblika $\frac{a}{b}$ gdje su a i b relativno prosti brojevi. Koliko je $a + b$?

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 11 E) 13